

トポロジカルな同期現象：非線形物理と固体物理の融合

曾根 和樹¹

¹ 筑波大学 数理物質系 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1

あらまし トポロジカル絶縁体に代表されるトポロジカル物質では、試料端に局在する特殊な固有状態（エッジモード）が出現する。このトポロジカルエッジモードと同期現象を組み合わせることで、2次元格子の端だけで同期し、内部ではカオスになるトポロジカルな同期状態の存在を理論的に解明した。本講演では、ミニマルモデルのダイナミクスのシミュレーションやリャプノフ解析を行った結果を紹介する。

キーワード トポロジカル物質, リャプノフ解析

Topological synchronization of coupled nonlinear oscillators

Kazuki Sone¹

¹ Department of Physics, University of Tsukuba
Tennodai 1-1-1 Tsukuba-shi, Ibaraki, 305-8571 Japan

Abstract Topological insulators exhibit edge modes localized at the edge of the sample. We here combine the notion of topology and synchronization and reveal the existence of topological synchronization, where nonlinear oscillators are synchronized at the edge, while they are chaotic in the bulk.

Key words Topological insulators, Lyapunov analysis

1. 研究背景

数学のトポロジーは摂動や不純物に対するロバストさの起源として、物理でも広く重要な役割を果たす。特に固体物理においては、バンド構造のトポロジーを考えることで、トポロジカル物質と呼ばれる非従来型の物質が発見された [1]。トポロジカル物質では、バルクエッジ対応と呼ばれる原理によって、系内部の周期構造（バルク）で定義されるトポロジカル指数と試料端に局在する固有状態（エッジモード）の数が一致する。バルクエッジ対応は固体物理に限らず、流体などの様々な古典系にも拡張されてきたが [2,3]、非線形系への拡張可能性については未解明である。

本研究では、2次元格子に並べられた非線形振動子間の結合をトポロジカル物質と同様に設計することによって、トポロジカルな同期状態を実現でき

ることを明らかにした [4]。ここでトポロジカルな同期状態とは、系の端の振動子のみが同期し、内部の振動子はカオスとなる状態である。

2. 結果

トポロジカルな同期状態は一般に、格子上に配置された非線形振動子間にトポロジカル物質のハミルトニアンを模した適切な線型結合を導入することで実現することができる。特に、本研究では Stuart-Landau 振動子を考える。この時、系の非線形ダイナミクスは以下のように記述される。

$$\frac{d}{dt}Z_j(\mathbf{x}) = (i\omega_j(\mathbf{x}) + \alpha - \beta|Z_j(\mathbf{x})|^2)Z_j(\mathbf{x}) - i \sum_{k,\mathbf{x}'} H_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') Z_k(\mathbf{x}'). \quad (1)$$

ここで、 $Z_j(\mathbf{x})$, ($j = 1, \dots, M$) は位置 $\mathbf{x}$ にある j 番目の振動子の複素状態変数、 M は内部自由度の数を

表す。また、線型結合は $H_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ で記述される。線型結合を導入しない場合、振幅 $\sqrt{\alpha/\beta}$ かつ自然周波数 $\omega_j(\mathbf{x})$ の振動が安定解となる。ただし、 $\omega_j(\mathbf{x})$ には確率的に非一様性を導入し、線型結合なしでは周波数が揃わない状況を考える。

線型結合を記述するハミルトニアン H としては、非エルミート性により固有値が複素数になること、さらに固有値の虚部が最大となる固有状態はエッジモードに対応することを要求する。これにより、一様な状態は線形不安定となり、代わりにエッジモードに対応する端に局在した同期状態が出現する。

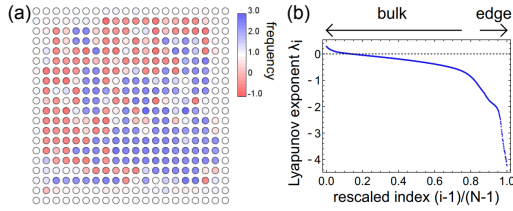


図 1: (a) トポロジカル同期状態では、端で周波数が揃い、内部では周波数がばらつく。(b) 数値的に得られたリャプノフ指数には正になるものが存在する。これらの図は [4] より引用した。

図 1(a) は式 (1) のダイナミクスを数値的にシミュレーションした結果を示す。数値シミュレーションは、4 次の Runge-Kutta 法で行った。この図では、端の振動子の周波数が揃い、同期している様子が確認できる。一方で、格子内部の振動子たちは空間的（時間的にも）不均一で、同期していないことが確認できる。

また、カオスな系の解析手法としてよく用いられるリャプノフ解析 [5] を行った。図 1(b) は数値的に得られたリャプノフ指数を表す。正のリャプノフ指数の存在は系のカオス性を意味する。さらに、リャプノフベクトルも計算すると、小さなリャプノフ指数になるほど対応するリャプノフベクトルが端に局在する様子が確認できる。このことは、端における初期状態の微小摂動に対しては動的に安定であることを意味し、内部の振動子のみがカオスな振る舞いをしていることを示唆する。

3. まとめと展望

本研究では Stuart-Landau 振動子にトポロジカルな線型結合を導入することで、端だけが同期し、内部はカオスになるトポロジカル同期状態が実現できることを明らかにした。より最近の研究で、非線形トポロ

ジーのバルクエッジ対応は固有値問題の非線形拡張に基づいて議論できることが明らかになった [6–8]。しかし、先行研究の提案は散逸の効果を考えていないため、散逸非線形系へのトポロジーの基本原則の拡張は今後の課題である。

謝辞 本研究およびその後の関連研究の共同研究者である 蘆田祐人先生、江澤雅彦先生、Zongping Gong 先生、初貝安弘先生、沙川貴大先生、澤田太郎氏、吉岡信行先生に感謝いたします。また、本研究は JSPS 科研費 (JP21J20199)、東京大学統合物質・情報卓越大学院 (MERIT-WINGS) の支援を受けて行われました。

参考文献

- [1] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Colloquium: Topological insulators, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045–3067 (2010).
- [2] Z. Yang, F. Gao, X. Shi, X. Lin, Z. Gao, Y. Chong, and B. Zhang, Topological Acoustics, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 114301 (2015).
- [3] P. Delplace, J. B. Marston, and A. Venaille, Topological origin of equatorial waves, *Science* **358**, 1075–1077 (2017).
- [4] K. Sone, Y. Ashida, and T. Sagawa, Topological synchronization of coupled nonlinear oscillators, *Phys. Rev. Research* **4**, 023211 (2022).
- [5] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chaté, R. Livi, and A. Politi, Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 130601 (2007).
- [6] K. Sone, M. Ezawa, Y. Ashida, N. Yoshioka, and T. Sagawa, Nonlinearity-induced topological phase transition characterized by the nonlinear Chern number, *Nat. Phys.* **20**, 1164–1170 (2024).
- [7] K. Sone, M. Ezawa, Z. Gong, T. Sawada, N. Yoshioka, and T. Sagawa, Transition from the Topological to the Chaotic in the Nonlinear Su-Schrieffer-Heeger Model, *Nat. Commun.* **16**, 422 (2025).
- [8] K. Sone and Y. Hatsugai, Topological-to-Topological Transition Induced by On-Site Nonlinearity in a One-Dimensional Topological Insulator, arXiv:2501.10087.