

ノイズ下の注入同期に潜む「ノイズ」の強度は推定可能か？

菅 聡明¹, 田中 久陽¹

¹ 電気通信大学 情報理工学研究科 〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

あらまし 弱い環境ノイズ下の注入同期において、観測可能量から同期発振器の実効的ノイズの強度と位相感受関数を同時に推定する理論的枠組みが得られた。この枠組みの下で、解析的アプローチと数値的アプローチを比較し、それぞれの推定精度を検証する。

キーワード 注入同期, ノイズ強度, 同期発振器

How noisy is a “noisy” synchronous oscillator?

Somei SUGA¹, Hisa-Aki TANAKA¹

¹ The Graduate School of Informatics and Engineering,
The University of Electro-Communications
Chofugaoka 1-5-1 Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

Abstract For designing injection locking under weakly noisy environments, a theoretical framework was obtained recently, that enables to simultaneously infer the effective noise intensity and the phase sensitivity function of synchronous oscillators from observable quantities. In this report, we compare the results of analytical and numerical approaches obtained from our framework, where we analyze the influence of errors included in observable quantities to the accuracy of the estimated noise intensity.

Key words Injection locking, noise intensity, synchronous oscillator

1. 研究背景

現実的な環境ノイズの下での発振器 (非線形振動子) の同期に関する研究は、古くから行われ、環境ノイズの下で動作する発振器には、発振位相に対し実効的ノイズが生じることが知られている [1]。最近得られた田中の方法 [2] は、弱い環境ノイズ下での注入同期において、実効的ノイズの強度等に対し、新規な解析的性質を明らかにし、このノイズ強度を有効な精度で推定可能にしている。田中の方法は、漸近近似による近似理論であり、あくまで弱ノイズの下でのみ、その結果が保証される。ところが、この近似を用いず、直接に、(数値的に積分方程式を解くことにより) 実効的ノイズの強度を推定することも原理的には可能である。本報告は、以上2つのアプローチの結果を比較することにより、両者の性能の差を明らか

にする。

2. 注入同期の解析手法

注入同期とは、非線形振動子に周期的な外部信号を注入することで、発振器が外部信号の周波数に引き込まれる基本的な物理現象である。位相縮約とよばれる摂動法的枠組み (例えば, [3] を参照) は、安定周期解を与える任意次元の常微分方程式を、発振位相 ϕ のみで閉じた方程式 (位相方程式) に縮約する。以下、この縮約が可能であるために、摂動 (入力と環境ノイズ) が十分に弱いという前提を置く。具体的には、環境ノイズとして弱ノイズ ($\equiv \sqrt{\epsilon}\xi(t)$) を想定し、位相感受関数 $Z(\phi)$ を持つ振動子に弱入力 $\epsilon q(\Omega t)$ と弱ノイズ $\sqrt{\epsilon}\xi(t)$ が注入される状況を考える。ここで、 ξ を平均 $\langle \xi(t) \rangle = 0$ 、自己相関 $\langle \xi(t_0)\xi(t_0+t) \rangle = 2\alpha^{-1}\delta(t)$

与えられるホワイトガウシアンノイズ (WGN) とする. この α^{-1} がノイズの強度に相当する. このとき, 位相縮約により発振位相 ϕ の従う方程式は

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + Z(\phi) [\epsilon q(\Omega t) + \sqrt{\epsilon} \xi(t)] \quad (1)$$

と得られる. さらに, 振動子の位相 ϕ と入力位相 Ωt の差 $\psi \equiv \phi - \Omega t$ を導入し, 速い変数 Ωt についての平均化の方法により, 最終的に次の overdamped Langevin 方程式に帰着する (例えば, [3] を参照):

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon [\Delta + \Gamma(\psi)] + \sqrt{\epsilon} \eta(t). \quad (2)$$

但し, $\epsilon\Delta = \omega - \Omega$ は振動子の固有周波数 ω と入力の周波数 Ω 間の離調を示し, $\Gamma(\psi)$ は位相結合関数である. (2) における実効的ノイズ $\eta(t)$ は, 平均 $\langle \eta(t) \rangle = 0$, 自己相関 $\langle \eta(t_0)\eta(t_0+t) \rangle = 2\beta^{-1}\delta(t)$, かつ $\beta^{-1} = \alpha^{-1}(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} Z^2(\psi) d\psi$ の WGN となる [3]. ここで, (2) の (ニュートンの運動方程式としての「外力」とみなされる) $\Delta + \Gamma(\psi)$ に対する「ポテンシャル」を $V(\psi) \equiv -\int^\psi [\Delta + \Gamma(\psi')] d\psi'$ により定義する. この, ポテンシャルの傾きを f とすると, $f = \Delta + \Gamma(\psi)$ の定数部分である. さらに, ψ の確率密度関数 (以下, PDF と略記) を $P(\psi, t)$ とすると, (2) は (最低次近似として) 次の Fokker-Planck 方程式にしたがい, その定常解 $P_S(\psi)$ も得られる [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\psi, t) = -\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \{ [\Delta + \Gamma(\psi)] P \} + \epsilon^2 \beta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P, \quad (3)$$

$$P_S(\psi) = C^{-1} \int_\psi^{\psi+2\pi} e^{\beta[V(\psi') - V(\psi)]} d\psi', \quad (4)$$

ただし, C は規格化定数であり, $\int_0^{2\pi} P_S(\psi) d\psi = 1$ より:

$$C = \int_0^{2\pi} \int_\psi^{\psi+2\pi} e^{\beta[V(\psi') - V(\psi)]} d\psi' d\psi. \quad (5)$$

以上の $P_S(\psi)$ の解析的表示と並行して, (2) の Langevin 方程式 (あるいは実験系) から, 数値的に (あるいは実験的に), これを得ることも可能である.

以上を踏まえ, 本研究は観測可能量である $P_S(\psi)$, 確率流 J_S , および f と, 実効的ノイズ強度 β^{-1} , さらに位相感受関数 Z の関係を明らかにし, その推定を可能にする枠組み [2] の下で, (i) その解析的アプローチと (ii) 数値的アプローチについて, その結果の比較を行う.

(i) 解析的な推定方法 (田中の方法)

これは, ひとことで言えば, 次の関係式:

$$\frac{P_S(\psi_{\max})}{P_S(\psi_{\min})} \approx 2e^{\beta(dV+f\Delta\psi)} / (1 + e^{\beta 2\pi f}) \quad (\beta \rightarrow \infty, |f| \rightarrow 0) \quad (6)$$

の発見による. 但し, $\Delta\psi$ は観測可能な位相差 $\Delta\psi \equiv \psi_{\max} - \psi_{\min}$ であり, f も観測可能. これにより, 実効的ノイズ強度 β^{-1} と (Z と q に対し固有の) ポテンシャル壁の高さ $dV \equiv V(\psi_{\min}) - V(\psi_{\max}) - f\Delta\psi$ が推定可能になる.

(ii) 数値的な推定方法

(i) の解析的アプローチと別に, 漸近近似を経ずに, 直接数値的にノイズ強度 β^{-1} を推定する方法もある. このとき, $\beta \gg 1$ と $|f| \ll 1$ の制約は不要である.

これは, ひとことで言えば, (4) より C に関し, 2 つの独立した式:

$$C = \frac{1}{P_S(\psi_{\max})e^{\beta V(\psi_{\max})}} \int_{\psi_{\max}}^{\psi_{\max}+2\pi} e^{\beta V(\psi')} d\psi',$$

$$C = \frac{1}{P_S(\psi_{\min})e^{\beta V(\psi_{\min})}} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min}+2\pi} e^{\beta V(\psi')} d\psi',$$

および,

$$V(\psi) = - \int_0^\psi P_S^{-1}(\psi') [J_S + \beta^{-1} P_S'(\psi')] d\psi'$$

に対し, 未知の β^{-1} を (ニュートン法により) 得るのである. ここで, $\psi_{\max}, \psi_{\min}, P_S(\psi_{\max}), P_S(\psi_{\min})$, さらに $V(\psi)$ 中の J_S は観測可能であることに注意する.

以上の (i), (ii) の結果の比較の詳細は, 口頭発表に譲る.

参考文献

- [1] A. J. Viterbi, *Principles of Coherent Communication*, (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [2] H.-A. Tanaka, S. Suga, A. Keida, H. Nakao, Y. Jitsumatsu, and I. Z. Kiss, Inferring noise intensity and phase response from noisy synchronous oscillators, *Phys. Rev. Research* **7**, 013076 (2025).
- [3] Y. Kato, N. Yamamoto, and H. Nakao, Semiclassical phase reduction theory for quantum synchronization, *Phys. Rev. Research* **1**, 033012 (2019).