振動と同期学の研究会
JSSR (Japanese Society for oscillations and Synchrology Research)

研究論文Research Paper

量子振動子の精度限界と同期現象への理論的アプローチ

長谷川 禎彦 [1]

[1] 東京大学 大学院情報理工学系研究科　〒 113–8656 東京都文京区本郷 7–3–1

あらまし　本発表では，連続測定下の量子振動子における精度限界と同期現象に関する理論的アプローチを紹介する．特に「チャイム型」量子時計に着目し，系から連続的に情報を取り出す状況を，Lindblad 方程式で記述される量子開放系の枠組みを用いて解析する．測定記録を埋め込んだ連続行列積状態に対し，量子情報理論の知見を適用することで導かれる量子熱力学不確定性関係を示す．この関係式は，古典的な振動子と比較して精度が量子的に向上する可能性を示唆する．さらに，確率的 Schrödinger 方程式で記述される連続ホモダイン測定を受ける量子振動子への位相縮約理論の応用について議論する．連続測定の枠組みを用いることで，時間計測の根本的な限界と量子系における同期現象の両面からの解析が可能となる．

キーワード 量子開放系, 熱力学不確定性関係, 連続測定, 位相縮約

Theoretical Approaches to Precision Limits and Synchronization in Quantum Oscillators

Yoshihiko Hasegawa[1]

[1] Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo
7–3–1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

Abstract This talk presents theoretical approaches to investigate the precision limit and synchronization phenomena in quantum oscillators under continuous measurement. Focusing on the “chime-type” quantum clock, where information is continuously extracted from the system, we utilize the framework of quantum open systems described by the Lindblad equation. We derive a quantum thermodynamic uncertainty relation by applying the quantum information theory to continuous matrix product states that embed the measurement record. This relation reveals the potential for quantum enhancement of precision compared to classical oscillators. Furthermore, we discuss the application of phase reduction theory to quantum oscillators subjected to continuous homodyne measurement, described by a stochastic Schrödinger equation. The continuous measurement framework allows for the analysis of both the fundamental limits of timekeeping and quantum synchronization phenomena.

Key words Quantum open systems, thermodynamic uncertainty relations, continuous measurement, phase reduction

正確な時刻を測る技術は，様々な科学技術の進歩を支えてきたと同時に，新しい技術の登場によって，これまで以上に高精度な時刻計測が可能になっている．振動子がどのような原理に基づいて動作し，その精度にはどのような限界があるのか，という問いは，科学的な興味のみならず，工学的にも重要な課題である．古典的な振動子がどれほどの精度で時を刻めるのかという点については，熱力学不確定性関

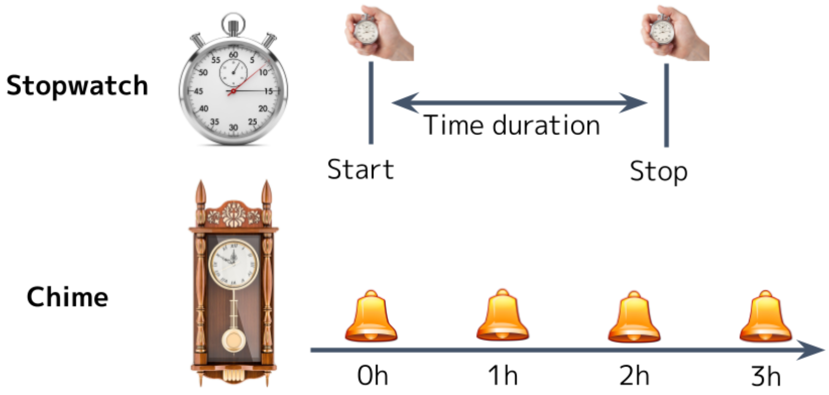

図 1: ストップウォッチ型（上）とチャイム型（下）の時計．ストップウォッチ型は初期状態からの時間経過を測定するのに対し，チャイム型は周期的なイベントの発生頻度を計測する．量子系では，測定による状態変化のため，両者を同時に高精度で実現することは難しい．

係 [1, 3] と呼ばれる関係式が注目を集めている．熱力学不確定性関係は，振動の位相の正規化分散（分散を平均の二乗で割った量）が，消費エネルギーの逆数の 2 倍を下回らないことを示している．また，振動現象においては，同期が極めて重要な役割を果たす．同期現象は，蛍の発光パターンなど自然界に普遍的に見られるだけでなく，純粋な科学的探求の対象として，また工学的な多様な応用においても重要である．時計の精度をさらに向上させるためには，量子力学的な性質を活用する必要があると考えられており，そのような背景から，量子系における熱力学不確定性関係の研究や量子同期現象が大きな注目を集めている．本発表では，連続測定と呼ばれる手法に着目し，連続測定下における量子振動子の熱力学不確定性関係と同期現象に対する理論的アプローチを紹介する．

量子時計は,「ストップウォッチ型」と「チャイム型」に大別することができる（図 1）．ストップウォッチ型では，初期状態を準備し，その状態を時間発展させる．ある時間経過後に最終状態を観測することで，初期状態から観測時点までの時間を測定する．一方，チャイム型では，系は断続的に外界に信号（例えばフォトンなど）を出力する．外界の観測者は，この信号に基づいて経過時間を推定する．古典的な時計の場合，これら二つのタイプの時計は両立可能であるが，量子系においては観測が量子状態を不可逆的に変化させるため，これら二つの要素を同時に高精度で実現することは困難である．本発表では，チャイム型における理論的取り組みについて紹介する．チャイム型は，断続的に情報を外界に取り出すため，外界との相互作用が不可避である．そのため，その状態の時間発展は通常の Schrödinger 方程式では記述できない．系がマルコフ過程に従って時間発展する場合，一般に量子開放系の状態変化は Lindblad 方程式と呼ばれる方程式によって記述される．時刻 t における密度演算子を $\rho(t)$ とすると，Lindblad 方程式は以下のように与えられる：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L}\rho. \tag{1}$$

ただし，$\mathcal{L}$ は時間発展超演算子（superoperator）であり，以下のように定義される：

$$\mathcal{L}\rho = -\mathrm{i}[\hat{H}, \rho] + \sum_{k=1}^{N_C} \mathcal{D}\left[\hat{L}_k\right]\rho. \tag{2}$$

ここで $\hat{H}$ はハミルトニアン，$\mathcal{D}[\hat{L}]\rho = \hat{L}\rho\hat{L}^\dagger - (1/2)\left\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \rho\right\}$ は dissipator 演算子，$\hat{L}_k$ はジャンプ演算子，N_C はチャネル数（$\hat{L}_k$ の数）を表す．例えば，二準位系において $|e\rangle$ と $|g\rangle$ を励起状態と基底状態とした場合，$\hat{L} = \sqrt{\kappa}|g\rangle\langle e|$ のようなジャンプ演算子が考えられる．このジャンプ演算子は，$|e\rangle$ から $|g\rangle$ への遷移を遷移率 κ で記述することに対応する．$\hat{L}_k$ における添字 k はジャンプの種類を表し，チャネルと呼ばれる．式 (2) の最初の項（$-\mathrm{i}[\hat{H}, \rho]$）は von Neumann 方程式と解釈できるため，孤立系のユニタリな時間発展を記述する．量子開放系は，弱い測定を時間的に連続的に行うプロセスとして理解でき，これを連続測定と呼ぶ [8]．$\sum_k \mathcal{D}[\hat{L}_k](\rho)$ の項は，測定が量子系に及ぼすデコヒーレンス効果や状態の収束傾向を定式化している．Lindblad 方程式自体は，測定結果を平均化した「非条件付き」の時

間発展を記述するが，実際の測定過程を詳細に扱う場合には，測定結果に依存する「条件付き」時間発展（確率微分方程式など）を考慮する必要がある．非条件付きの Lindblad 方程式によるダイナミクスは，方程式が与えられれば一意に定まるが，条件付きダイナミクスは無限のバリエーションが存在する．例えば，図 2(a) は，ジャンプ測定と呼ばれる場合であり，断続的なジャンプに関する情報が得られる．一方，図 2(b) はホモダイン測定と呼ばれるものであり，連続的な白色ノイズのような情報が得られる．どちらの場合でも，平均化されたダイナミクスは同じになる．

連続測定によって得られるジャンプの情報は，連続行列積状態 [11, 13] という量子状態に埋め込むことができる．この連続行列積状態は通常の量子状態と同様に扱うことができるため，量子推定理論を適用することが可能となる．具体的には，未知のパラメータ θ が連続行列積状態 $|\Psi(\theta)\rangle$ にエンコードされているとする．この状態に対して適切な量子測定を行うことで，古典的なデータ $\mathcal{D}$ を取得し，そのデータに基づいてパラメータ θ の推定値 $\hat{\theta}$ を得る．時刻 0 から τ までの間にチャネル m で観測されたジャンプ回数を N_m とする．このとき，$N = \sum_m C_m N_m$ という量を考える．ここで C_m は重み係数であり，任意の実数を取ることができる．このとき，量子 Cramér–Rao 不等式を適用することで，以下の量子熱力学不確定性関係を導出できる [4].

$$\frac{\mathrm{Var}[N]}{\langle N\rangle^2} \geq \frac{\zeta}{\tau(\Upsilon+\Xi)}. \tag{3}$$

ここで $\Upsilon \equiv \sum_k \mathrm{Tr}\left[\hat{L}_k \rho^{\mathrm{ss}} \hat{L}_k^\dagger\right]$（$\rho^{\mathrm{ss}}$ は定常密度演算子）であり，Ξ は Lindblad 方程式におけるコヒーレンスの効果を定量化する量である．式 (3) は，観測されるジャンプ数 N の相対分散が，観測時間 τ と，定常状態におけるジャンプ演算子に関連する量 Υ およびコヒーレンス項 Ξ によって下限が与えられることを示す．この不等式は，量子時計の精度限界を議論する上で重要な役割を果たす．Υ は，古典確率過程において Dynamical activity と呼ばれる物理量であり，古典的な速度限界においても重要な役割を果たす．Lindblad 方程式 (1) において，$\hat{H} = 0$ とすると古典的な確率過程を再現することが可能である．このとき，$\Xi = 0$ となることが知られている．これは，量子的な効果によって，古典的な振動子よりも高い精度を達成できる可能性を示唆している．連続行列積状態によって連続測定を記述することで，あたかも閉じた系の時間発展のように時間変化を扱うことが可能となる．実際に，文献 [5, 10] においては，Heisenberg の不確定性関係から熱力学不確定性関係が導出可能であることが示されている．熱力学不確定性関係と類似の関係式として，量子速度限界 [9, 2] が知られている．量子速度限界とは，量子力学における系の時間発展の速さの上限である．系のエネルギーが高いほど，より速く状態が変化できる一方，エネルギーが低いと変化は遅くなるというものである．この限界は，量子コンピュータの演算速度や量子通信における情報伝達速度など，様々な量子技術の性能を理論的に制約する重要な概念である．連続行列積状態による表現を用いることで，量子速度限界と量子熱力学不確定性関係は双対関係であることが示される [5].

連続測定による定式化は，熱力学不確定性関係の導出以外にも有効である．振動現象の研究において，同期現象の解明は中心的な課題の一つである．生命現象から物理現象まで，多様なシステムにおいて重要な意味を持つ．例えば，脳内のニューロン発火の同期は，情報の伝達や処理，リズムの生成といった高次な情報処理に深く関与している．一方，物理現象においても，Josephson 接合の位相同期は，高感度な量子センサーといった先進技術に応用されている．位相縮約理論 [7] は，非線形振動子やリミットサイクルを持つ動的システムを解析するための数学的枠組みであり，特に周期性を持つ現象を理解する上で重要な役割を果たす．複雑な高次元の動的システムを，単一のスカラー量である「位相」を用いて記述することで，本質的な振る舞いを抽出する．重要な概念として位相応答曲線がある．これは外部からの摂動が位相に与える影響を定量化するものであり，振動子の固有の性質を反映する．位相応答曲線を知ることで，外部からの弱い刺激に対する振動子の位相の変化を予測できる．例えば，ある確率的な現象を記述する方程式が以下で与えられるとする．

$$dx = F(x)dt + dW(t). \tag{4}$$

ここで，x は系の状態，$F(x)$ は一般には非線形な関数を表し，$dW(t)$ はノイズ項であり，標準 Wiener 過程を表す．式 (4) を，位相変数 θ を用いたより単純な式

$$d\theta = \omega dt + Z(\theta) \circ dW(t), \tag{5}$$

に縮約する．ここで ω はシステムの自然角周波数，$dW(t)$ は外部摂動，$Z(\theta)$ は位相応答曲線である．こ

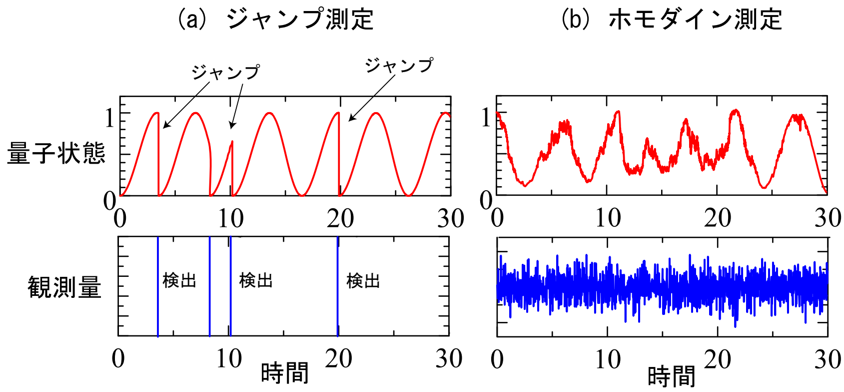

図 2: (a) ジャンプ測定による連続測定の例.(b) ホモダイン測定による連続測定の例. 上図は量子状態の軌跡, 下図は対応する測定結果を示す. 量子状態の発展は測定結果に依存する.

れにより，多数の振動子が相互作用する複雑な系においても，同期現象の解析が格段に容易になる．近年，量子系における位相縮約理論がいくつか提案されている [14]．我々は，文献 [12] において，連続測定を用いた位相縮約理論を提案している．具体的には，ホモダイン測定下の系の時間発展は以下の確率 Schrödinger 方程式によって記述される．

$$d|\psi\rangle = \Bigg[-iH + \sum_k \frac{1}{2}\left(\left\langle \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \right\rangle - \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k\right) + \langle \hat{X}_k\rangle \left(\hat{L}_k - \frac{\langle \hat{X}_k\rangle}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(2\hat{L}_k^2 - \left\langle \hat{L}_k^2 + \hat{L}_k^{\dagger 2}\right\rangle\right)\Bigg]|\psi\rangle dt + \sum_k \left(\hat{L}_k - \frac{\langle \hat{X}_k\rangle}{2}\right)|\psi\rangle \circ dW_k, \quad (6)$$

ここで $\hat{X}_k = \hat{L}_k + \hat{L}_k^\dagger$ である．式 (6) は確率微分方程式であるため，式 (4) に対する適用と同様に位相縮約理論を適用できる．ただし，古典系と異なり，量子状態 $|\psi\rangle$ は常に正規化されている必要があるため，系に対する摂動はユニタリ変換であることが要請される．そのため，古典的な場合とは異なる取り扱いが必要になる点に注意が必要である．

このように，連続測定の枠組みを用いると，量子状態のダイナミクスは確率過程として記述可能になる．これにより，量子系における時間計測の精度限界や，複数の量子振動子間の同期現象を確率論的に解析することが可能になる．本発表では，この枠組みを用いて，具体的な量子振動子モデルにおける精度限界と同期のメカニズムについて議論する．また，最近の取り組みである，量子計算機を用いた熱力学不確定性関係の検証 [6] などを紹介する．

参考文献

[1] Andre C Barato and Udo Seifert. Thermodynamic uncertainty relation for biomolecular processes. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 114, p. 158101, 2015.

[2] Sebastian Deffner and Steve Campbell. Quantum speed limits: from Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 50, p. 453001, 2017.

[3] Todd R. Gingrich, Jordan M. Horowitz, Nikolay Perunov, and Jeremy L. England. Dissipation bounds all steady-state current fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 120601, 2016.

[4] Yoshihiko Hasegawa. Quantum thermodynamic uncertainty relation for continuous measurement. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 125, p. 050601, 2020.

[5] Yoshihiko Hasegawa. Unifying speed limit, thermodynamic uncertainty relation and Heisenberg principle via bulk-boundary correspondence. *Nat. Commun.*, Vol. 14, p. 2828, 2023.

[6] Nobumasa Ishida and Yoshihiko Hasegawa. Quantum computer-based verification of quantum thermodynamic uncertainty relation. *arXiv:2402.19293*, 2024.

[7] Yoshiki Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover publications, Mineola, New York, 2003.

[8] Gabriel T. Landi, Michael J. Kewming, Mark T. Mitchison, and Patrick P. Potts. Current fluctuations in open quantum systems: Bridging the gap between quantum continuous measurements and full counting statistics. *PRX Quantum*, Vol. 5, p. 020201, 2024.

[9] L. Mandelstam and Ig. Tamm. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. *J. Phys. USSR*, Vol. 9, pp. 249–254, 1945.

[10] Tomohiro Nishiyama and Yoshihiko Hasegawa. Tradeoff relations in open quantum dynamics via Robertson, Maccone-Pati, and Robertson-Schrödinger uncertainty relations. *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 57, p. 415301, 2024.

[11] Tobias J. Osborne, Jens Eisert, and Frank Verstraete. Holographic quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 105, p. 260401, 2010.

[12] Wataru Setoyama and Yoshihiko Hasegawa. Lie algebraic quantum phase reduction. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 132, p. 093602, 2024.

[13] F. Verstraete and J. I. Cirac. Continuous matrix product states for quantum fields. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 104, p. 190405, 2010.

[14] 加藤譲, 中尾裕也. 量子漸近位相が拓く量子同期現象の世界. 日本物理学会誌, Vol. 79, No. 8, p. 10, 2024.