結合振動子系の同期現象に誘発される waveform proportionality と Taylor's law

三井 譲 [1,2], 郡 宏 [3]

[1] 九州大学 芸術工学研究院　〒 815–8540 福岡県福岡市南区塩原 4–9–1
[2] 九州大学 数理・データサイエンス教育研究センター　〒 819–0395 福岡県福岡市西区元岡 744
[3] 東京大学 新領域創成科学研究科　〒 277–8561 千葉県柏市柏の葉 5–1–5

あらまし　Taylor's law（TL）とは平均と分散の間に成立するべき乗則のことであり，様々な分野でその成立が確認されているが，発生機構についてはいまだ詳細がわかっていない．本研究では，同期現象が TL を誘発し得ることを結合振動子系を用いて解析的および数値的に示した．特に，強い結合により時系列が互いに定数倍の関係になると指数 2 の TL が発現することを示した．
キーワード Taylor's law，power law, 同期現象

Waveform proportionality and Taylor's law induced by synchronization of coupled oscillators

Yuzuru MITSUI[1], Hiroshi KORI[1]

[1] Faculty of Design, Kyushu University
4–9–1 Shiobaru, Minami-ku, Fukuoka 815-8540, Japan,
[2] Education and Research Center for Mathematical and Data Science, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan
[3] Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo
5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba 277-8561, Japan

Abstract Taylor's law (TL), the scaling relationship between mean and variance, has been widely verified, yet its detailed mechanisms remain unclear. Here, using coupled oscillators, we show analytically and numerically that synchronization can induce TL. In particular, we show that when the oscillators are strongly coupled and the time series become proportional, TL with an exponent 2 emerges.
Key words Taylor's law，power law, synchronization

1.　研究背景

Taylot's law [1]（TL）とは平均と分散の間に成立するべき乗則のことであり，次のように記述される:

$$\log(\text{variance}) = \log\alpha + \beta \times \log(\text{mean}). \tag{1}$$

平均と分散の計算方法により TL は 2 種類に大別される．複数の時系列に対し，時系列それぞれの時間平均と分散を用いる場合に temporal TL と呼ぶ．一方で，各時刻におけるアンサンブル平均と分散を用いる場合に spatial TL と呼ぶ．TL は生態学をはじめとして様々な分野におけるデータでその成立が確認されており [2, 3]，その発生機構に関する理論的な研究も精力的におこなわれてきた．しかしながら，いまだにその詳細はわかっておらず，なぜ生態系で

広範に TL が観測されるのか，なぜ生態系で観測される TL の指数は 2 に近いことが多いのか，また，temporal TL と spatial TL の発生機構は同じなのか否かといった問題が議論されている．本研究では，TL と同様に生態系で広く観測されている現象である同期現象が TL の発生機構としてはたらいているのではないかという仮説をたて，結合振動子モデルを用いてこれを検証した．

2. 結果

ここでは以下の coupled food chain model [4] を用いて結果の概要を記す．計算の詳細やその他のモデルにおける結果は文献 [5] を参照されたい．

$$\dot{x}_i = a(x_i - x^*) - l x_i y_i, \tag{2a}$$

$$\dot{y}_i = -b_i(y_i - y^*) + l x_i y_i - k y_i z_i + \frac{D}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_j - y_i), \tag{2b}$$

$$\dot{z}_i = -c(z_i - z^*) + k y_i z_i. \tag{2c}$$

x_i, y_i, z_i はそれぞれ生息地 i（$i = 1, \cdots, N$）における植物，草食動物，肉食動物の個体数を表し，D は結合強度である．本研究では x_i のダイナミクスおよび TL に着目する．結合強度に依存して同期現象を観測することができる（図 1）．特に，強い結合を与えると時系列が互いに定数倍の関係になるような同期状態を起こすことができる．我々はこの状態を waveform proportionality と名付けた．Waveform proportionality が成立しているとき，以下のように指数 2 の temporal TL と spatial TL の成立が確認できる．まず，時系列が互いに定数倍の関係になっているので次の式が成り立っている．

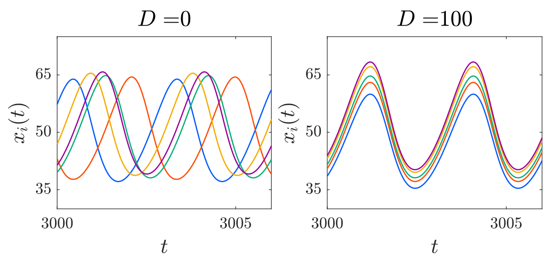

図 1: $x_i(t)$ の時系列の例.

$$x_i(t) = C_i x_0(t). \tag{3}$$

ここで C_i は定数であり，$x_0(t)$ は基準となる時系列である．このとき，時間平均と分散はそれぞれ $\mathrm{E}[x_i(t)]_t = C_i \mathrm{E}[x_0(t)]_t, \mathrm{Var}[x_i(t)]_t = C_i^2 \mathrm{Var}[x_0(t)]_t$ と計算される．C_i を消去して次の関係式を得る．

$$\mathrm{Var}[x_i(t)]_t = \frac{\mathrm{Var}[x_0(t)]_t}{\mathrm{E}[x_0(t)]_t^2}\mathrm{E}[x_0(t)]_t^2. \tag{4}$$

これは指数 2 の temporal TL を表す．また，式 (3) より，アンサンブル平均と分散はそれぞれ $\mathrm{E}[x_i(t)]_i = \mathrm{E}[C_i]_i x_0(t), \mathrm{Var}[x_i(t)]_i = \mathrm{Var}[C_i]_i\,[x_0(t)]^2$ と計算される．$x_0(t)$ を消去して次の関係式を得る．

$$\mathrm{Var}[x_i(t)]_i = \frac{\mathrm{Var}[C_i]_i}{\mathrm{E}[C_i]_i^2}\mathrm{E}[x_0(t)]_i^2. \tag{5}$$

これは指数 2 の spatial TL を表す．Waveform proportionality は実際に解析的・数値的に確認することができる [5]．TL の計算例を図 2 に示す．

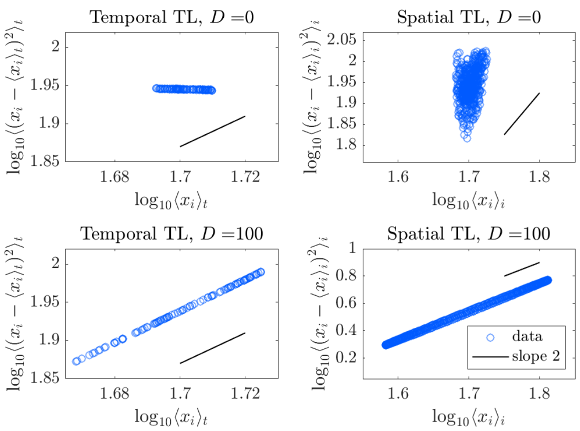

図 2: TL の計算例.

謝辞 本研究は JSPS 科研費番号 23KJ0830, 21K12056，および東京大学 WINGS CFS プログラムの支援を受けておこなわれました．

参考文献

[1] L. R. Taylor, Nature (London) **189**, 732 (1961).

[2] Z. Eisler, I. Bartos, and J. Kertész, Adv. Phys. **57**, 89 (2008).

[3] R. A. J. Taylor, *Taylor's Power Law: Order and Pattern in Nature* (Academic Press, New York, 2019).

[4] B. Blasius and L. Stone, Int. J. Bifurcation Chaos **10**, 2361 (2000).

[5] Y. Mitsui and H. Kori, Phys. Rev. Lett. (2025, accepted), arXiv:2308.02124.