

固有振動数に基づく形状最適化問題の解法と材料定数同定問題への応用

竹内 謙善¹, 福原 颯¹

¹ 香川大学 創発科学研究科 〒760-8521 香川県高松市幸町 1-1

あらまし 機械を構成する部品の固有振動数は、機械構造物の振動特性を決定付ける重要な指標である。所望の固有振動数となるように部品を設計または部品のパラメータを同定したいというニーズは製品の設計開発の現場でしばしば現れる問題である。本稿では、まず形状最適化問題の解法として随伴変数法を示し、さらにその応用として材料定数同定問題の解法についても述べる。
キーワード 随伴変数法, 形状最適化問題, 材料定数同定問題

Solution method for shape optimization problems based on natural frequencies and its application to material constant identification problems.

Kenzen TAKEUCHI¹, So FUKUHARA¹

¹ Kagawa University, Graduate School of Science for Creative Emergence
Saiwaicho 1-1, Takamatsu City, Kagawa Prefecture 760-8521, Japan

Abstract The natural frequency of the components is an important index that determines the vibration characteristics of the machine structure. In product design, there is a demand for designing components and identifying their parameters with desired natural frequencies. In this paper, the adjoint variable method is presented as a method for solving shape optimization problems. Furthermore, as an application, a method for solving the material constant identification problem is also presented.

Key words adjoint variable method, shape optimization problem, material constant identification problem

1. 背景

線形弾性体の形状を設計対象とした、固有振動数の最大化あるいは最小化問題の解法が呉ら [1] によって提案されている。この解法では形状の変化を写像関数と考えて、その写像関数を設計変数とし、固有振動数の設計変数に対する微分（形状微分）を求めることで、有限次元空間における勾配法と同様の解法が関数空間において適用されている。形状微分の導出には随伴変数法が用いられており、1回の有限

要素解析と比較的単純な演算のみで形状微分を計算することが可能となっている。固有振動数の形状微分が容易に計算できることを利用して、複数の固有振動数が所望の値と一致するように線形弾性体の形状を同定する手法 [2] も提案されている。その一方で、有限個のパラメータを設計変数とする最適化問題においても、固有振動数の設計パラメータに対する微分が随伴変数法で計算できる場合には、従来の汎用的な最適化手法よりも効率の良い解法が構築できる可能性がある。

本稿では、まず固有振動数を目的関数とする形状最適化問題の解法を概観し、次に材料定数同定問題に随伴変数法を適用した解法を示す。

2. 線形弾性体の固有振動問題

線形弾性体 Ω の固有振動数を f 、固有振動モードを $\mathbf{u}$ とする。 $\mathbf{u}$ の許容集合を $\mathbf{U}$ とする。この時、線形弾性体の固有振動問題は、任意の関数 $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ を用いて、以下のような弱形式で記述できる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad , \forall \mathbf{v} \quad (1)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega} D_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} d\Omega \quad (2)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega} \rho u_i v_i d\Omega \quad (3)$$

ただし、 ρ は線形弾性体を構成する材料の質量密度、 D は弾性テンソルである。

3. 形状最適化問題の解法

線形弾性体の形状変化を写像関数 ϕ と表記し、目的関数を f 、設計変数を ϕ とする最適化問題のラグランジュ関数を次式のように定義する。

$$L(f, \phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv f + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4)$$

この時、 $f, \phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ の微小変動量をそれぞれ $f', \phi', \mathbf{u}', \mathbf{v}'$ と表記し、これらの微小変動量に対するラグランジュ関数の変動量は次式で表される。

$$\begin{aligned} L'(f', \phi', \mathbf{u}', \mathbf{v}') &= f' - (8\pi^2 f f') b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\quad + a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{v}) \\ &\quad + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \\ &\quad + \int_{\Gamma} G \mathbf{v} \cdot \phi d\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 Γ は Ω の境界、 $\mathbf{v}$ は Γ 上で定義される単位法線ベクトルである。ここで、次式を満足する $f, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ を求める。求められた $\mathbf{v}$ を随伴変数と呼ぶ。

$$a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{v}) \quad , \forall \mathbf{u}' \quad (6)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \quad , \forall \mathbf{v}' \quad (7)$$

$$(8\pi^2 f) b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 \quad (8)$$

求められた $f, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ を式(5)に代入すると、形状の微小変動量 ϕ に対する固有振動数の変動量 f' の関係が得られる。

$$L' = f' = \int_{\Gamma} G \mathbf{v} \cdot \phi d\gamma \quad (9)$$

$$G \equiv D_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} - (2\pi f)^2 \rho u_i v_i \quad (10)$$

H^1 勾配法は、次式を満足するように ϕ を求めて形状更新を繰り返して最適形状を求める方法である。

$$\alpha \alpha(\phi, \mathbf{w}) + \int_{\Gamma} \phi \cdot \mathbf{w} d\gamma = \int_{\Gamma} G \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\gamma \quad , \forall \mathbf{w} \quad (11)$$

4. 材料定数同定問題の解法

線形弾性体の弾性テンソル D が有限個のパラメータによって陽に求められるものとする。例えば、等方性材料では2個、直交異方性材料では9個のパラメータで弾性テンソルを決定できる。これらの有限個のパラメータを設計変数として、固有振動数を最大化または最小化する最適化問題を考える。設計変数の一つを x_d として、以下のようなラグランジュ関数を定義する。

$$L(f, x_d, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv f + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (2\pi f)^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (12)$$

前節と同様の導出過程を経て固有振動数 f の x_d に対する微分は次式のように求められる。

$$\frac{\partial f}{\partial x_d} = \int_{\Omega} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_d} u_{i,j} v_{k,l} d\Omega \quad (13)$$

設計変数に対する目的関数の微分が計算できれば、勾配法に基づいて最適解を探索することができる。

次に、設計変数ベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 、複数の固有振動数を $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ と表記した時に、それぞれの固有振動数が所望の値 $\bar{\mathbf{f}} \equiv (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)^T$ と一致するように設計変数を同定する問題を考える。式(13)に基づいて、各設計変数に対する各固有振動数の微分を計算して次式のような行列 $\mathbf{G}$ を定義する。

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$m = n$ であれば、次式を繰り返して最適解を探索することができる。 $m \neq n$ でも適切な解法が構築できる。

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{f}}) \quad (15)$$

参考文献

- [1] 呉志強, 畔上秀幸, 固有振動問題における領域最適化解析: 力法によるアプローチ, 日本機械学会論文集 C 編, 61.583: pp.930-937 (1995).
- [2] 竹内謙善, 固有振動数に基づく形状同定解析, 日本応用数理学会 2006 年度年会講演予稿集: pp.152-153 (2006)