

ノイズ下の注入同期に潜む「ノイズ」の強度は推定可能か？

菅 聡明¹, 田中 久陽¹

¹ 電気通信大学 情報理工学研究所 〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

あらまし 弱い環境ノイズ下の注入同期において、観測可能量から同期発振器の実効的ノイズの強度と位相感受関数を同時に推定する理論的枠組みが得られた。この枠組みの下で、解析的アプローチと数値的アプローチの結果を比較し、観測可能量に含まれる誤差の推定精度への影響を考察する。

キーワード 注入同期, ノイズ強度, 同期発振器

How noisy is a “noisy” synchronous oscillator?

Somei SUGA¹, Hisa-Aki TANAKA¹

¹ The Graduate School of Informatics and Engineering,
The University of Electro-Communications
Chofugaoka 1-5-1 Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

Abstract This document explains how to prepare manuscripts for the Mathematical Society of Traffic Flow.

Key words Injection locking, noise intensity, synchronous oscillator

1. English Sample

Finally, we characterize experimentally accessible quantities required in this study. Here, we assume that $P_S(\psi)$ and J_S can be measured; J_S is obtained through the time average of $\dot{\psi}$ since $J_S = (2\pi)^{-1} \langle \dot{\psi} \rangle$ [?, 7, 9, 10]. Reliable data, such as experimental data and simulation data for **microsystems of colloidal particles** [?, ?, ?, 7, 10] and for **certain electronic circuits** [1], have been obtained for these quantities of $P_S(\psi)$ and J_S . **In addition to $P_S(\psi)$ and J_S , f can be measured** by calculating $f = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\psi J_S P_S(\psi)^{-1}$, as shown in Eq. (??). The potential $V(\psi)$ is reconstructed from β , J_S , and $P_S(\psi)$ (cf. [?, ?, 7, 9, 10]), as shown in Eq. (??).

In what follows, for notational convenience, we denote the measured (or estimated) value of a physical quantity α as $\tilde{\alpha}$; for instance, in the numerical experiments described below, \tilde{P}_S and \tilde{J}_S , as opposed to the

(true) P_S and J_S , respectively, are measured through the numerical integration of Eq. (??). **Figure ?? shows the proposed framework inferring β^{-1} and Z from the measured observables \tilde{P}_S , \tilde{J}_S and \tilde{f} .**

2. coherence of oscillations

2.1 Background and basic properties

Here, we define the coherence of oscillations under synchronization **using** only directly measurable quantities in noisy oscillators. **The maximization of such coherence of oscillations in noisy oscillators with external forcing was independently addressed in [?] and [?].** In [?], the diffusion constant D was associated with coherence ($\equiv C_D$ defined below), **under the assumption of a particle (or phase point) in the potential V defined above, driven by the white Gaussian noise η [?]; a lower D implies higher coherence.** While, in [?], the height

of the potential barrier was associated with coherence; a higher potential barrier implies a longer average escape time over a potential barrier, which hints another coherence measure ($\equiv C_S$ defined below).

Regarding these two coherence measures, we have the following basic properties of the potential $V(\psi)$. Firstly, the maximum and minimum values of $V(\psi)$ for $\psi \in [0, 2\pi]$ are assumed to be attained at $\psi = \psi_u$ and ψ_s , respectively, where $-V'(\psi_{u,s}) = \Delta + H(\psi_{u,s}) = 0$, as shown in Fig. ??(a); ψ_u and ψ_s respectively correspond to the unstable and stable points for the phase equation $\dot{\psi} = \Delta + H(\psi)$ [?, 5]:

$$H'(\psi_u) = -V''(\psi_u) > 0, \quad H'(\psi_s) = -V''(\psi_s) < 0. \quad (1)$$

On the other hand, we define the maxima and minima of $P_S(\psi)$ as $\psi = \psi_{\max}$ and ψ_{\min} , respectively, which satisfy $P'_S(\psi_{\max}) = P'_S(\psi_{\min}) = 0$, as shown in Fig. ??(b). Then, we obtain $\psi_{\max, \min} \approx \psi_{s,u}$, respectively, asymptotically for $|f| \ll 1$ or for $\beta \gg 1$, as follows. First, after integrating the RHS of Eq. (??) and plugging $P'_S(\psi_{\max, \min}) = 0$ into the result, we obtain the following:

$$\begin{aligned} & [\Delta + H(\psi_{\max})] P_S(\psi_{\max}) \\ &= [\Delta + H(\psi_{\min})] P_S(\psi_{\min}) = J_S. \end{aligned} \quad (2)$$

Next, as $|f| \rightarrow 0$ or as $\beta \rightarrow \infty$, $|J_S| \rightarrow 0$ follows immediately from Eq. (??) and hence $\Delta + H(\psi_{\max, \min}) \rightarrow 0$ in Eq. (2). These imply that $\psi_{\max, \min} \approx \psi_{s,u}$, respectively. Here, we note that for all the examples in Sec. ??, $\psi_{\max, \min} \approx \psi_{s,u}$ was numerically verified.

3. 研究背景

現実的な環境ノイズの下での発振器（非線形振動子）の同期に関する研究は、古くから行われている。（例えば、ビタビの有名な教科書 [1] には、その解析と実験系で得られた確率密度関数のデータが記載されているが、現在でも古さを感じさせない。）環境ノイズの下で動作する発振器には、位相ノイズとよばれる実効的ノイズが生じる。この実効的ノイズの背後にあるメカニズム（法則）を知ることにより、ミクロな系（例えば [2]）の理解と応用が可能になると期待される。最近得られた田中の方法（論文投稿中）は、弱い環境ノイズ下での注入同期において、実効的ノイズの強度等に対し、新規な解析的性質を明

らかにし、以下に示すように、このノイズ強度を有効な精度で推定可能にしている。田中の方法は、漸近近似による近似理論であり、あくまで弱ノイズの下でのみ、その結果が保証される。ところが、この近似を用いず、直接に、(数値的に積分方程式を解くことにより) 実効的ノイズの強度を推定することも(原理的には) 可能と考えられる。本報告は、以上2つのアプローチの結果を比較することにより、両者の差異を明らかにする。

4. 注入同期の解析手法

注入同期とは、非線形振動子に周期的な外部信号を注入することで、発振器が外部信号の周波数に引き込まれる基本的な物理現象である。位相縮約とよばれる摂動法的枠組み（例えば、[3]を参照）は、安定周期解（リミットサイクル）を与える任意次元の常微分方程式を、発振位相 ϕ のみで閉じた方程式（位相方程式）に縮約する。以下、この縮約が可能であるために、摂動（入力と環境ノイズ）が十分に弱いという前提を置く。具体的には、環境ノイズとして弱ノイズ ($\equiv \sqrt{\epsilon}\xi(t)$) を想定し、位相感受関数 $Z(\phi)$ を持つ振動子に弱入力 $\epsilon q(\Omega t)$ と弱ノイズ $\sqrt{\epsilon}\xi(t)$ が注入される状況を考える。ここで、 ξ を平均 $\langle \xi(t) \rangle = 0$ 、自己相関 $\langle \xi(t_0)\xi(t_0+t) \rangle = 2\alpha^{-1}\delta(t)$ で与えられるホワイトガウシアンノイズ (WGN) とする。この α^{-1} がノイズの強度に相当する。このとき、位相縮約により発振位相 ϕ の従う方程式は

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + Z(\phi) [\epsilon q(\Omega t) + \sqrt{\epsilon}\xi(t)] \quad (3)$$

と得られる。さらに、振動子の位相 ϕ と入力位相 Ωt の差 $\psi \equiv \phi - \Omega t$ を導入し、速い変数 Ωt についての平均化の方法により、最終的に次の overdamped Langevin 方程式に帰着する（例えば、[3]を参照）:

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon [\Delta + \Gamma(\psi)] + \sqrt{\epsilon}\eta(t). \quad (4)$$

但し、 $\epsilon\Delta = \omega - \Omega$ は振動子の固有周波数 ω と入力位相の周波数 Ω 間の離調を示し、位相結合関数 $\Gamma(\psi)$ の定義は:

$$\Gamma(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\theta + \psi) q(\theta) d\theta. \quad (5)$$

(4) における実効的ノイズ $\eta(t)$ は位相ノイズとよばれ、平均 $\langle \eta(t) \rangle = 0$ 、自己相関 $\langle \eta(t_0)\eta(t_0+t) \rangle = 2\beta^{-1}\delta(t)$ 、かつ

$$\beta^{-1} = \alpha^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z^2(\psi) d\psi \quad (6)$$

の WGN となる [3]. ここで, (4) の (ニュートンの運動方程式としての「外力」とみなされる) $\Delta + \Gamma(\psi)$ に対する「ポテンシャル」を

$$V(\psi) \equiv - \int^{\psi} [\Delta + \Gamma(\psi')] d\psi' \quad (7)$$

により定義する [4-10]. この, ポテンシャルの傾きを f とすると, $f = \text{「}\Delta + \Gamma(\psi)\text{の定数部分」}$ である. そこで, $V(\psi)$ から, その直流成分 ($\equiv -f \cdot \psi$) を除いた周期関数を $\bar{V}(\psi)$ と表示することにする. さらに, ψ の確率密度関数 (以下, PDF と略記) を $P(\psi, t)$ とすると, (4) は (最低次近似として) 次の Fokker-Planck 方程式にしたがうことはよく知られている [3, 4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\psi, t) = -\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \{ [\Delta + \Gamma(\psi)] P \} + \epsilon^2 \beta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P. \quad (8)$$

(8) の定常解 $P_S(\psi)$ は, ((8) の左辺 = 0 として, 右辺を ψ について積分することで) 以下の通り得られる. 同様に, $P_S(\psi)$ に付随する確率流 J_S も (右辺を ψ について積分した $-[\Delta + \Gamma(\psi)] P_S(\psi) + \beta^{-1} P_S'(\psi) \equiv J_S$ (積分定数) により) 以下の通り得られる [5, 6]:

$$P_S(\psi) = C^{-1} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} e^{\beta[V(\psi') - V(\psi)]} d\psi', \quad (9)$$

$$J_S = \beta^{-1} C^{-1} \left(1 - e^{-2\pi f \beta} \right). \quad (10)$$

ただし, C は規格化定数であり, $\int_0^{2\pi} P_S(\psi) d\psi = 1$ より:

$$C = \int_0^{2\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} e^{\beta[V(\psi') - V(\psi)]} d\psi' d\psi. \quad (11)$$

以上 (9, 10) の $P_S(\psi)$, J_S の解析的表示と別に, (4) の Langevin 方程式 (あるいは実験系) から, 数値的に (あるいは実験的に), これらを得ることも可能である. まず, $P_S(\psi)$ は (4) を観測して得られる ψ の分布 (ヒストグラム) に相当する ([1] 参照). 次に, 確率流 J_S については, 次の関係が成立する: $\langle \dot{\psi} \rangle = \langle \Delta + \Gamma(\psi) \rangle = \int_0^{2\pi} -\frac{dV}{d\psi} P_S(\psi) d\psi = 2\pi J_S$. この $\langle \dot{\psi} \rangle$ は, (4) (もしくは実験系を) ある程度の時間観測して得られる [7-10]. (例えば, 高周波数の発振回路の場合, この観測は瞬時に行われる.) つまり, 実験系において $P_S(\psi)$ と J_S は比較的容易に得られる場合がある. また, ポテンシャルの傾き f は $P_S(\psi)$ 及び J_S を用いて, $f = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} J_S P_S^{-1}(\psi) d\psi$ により与えられる.

以上を踏まえ, 本研究は観測可能量である $P_S(\psi)$, J_S , および f と, 実効的ノイズ強度 β^{-1} , さらに位相感受関数 Z の関係を明らかにし, その推定を可能にする新規な方法を示す. さらにその解析的アプローチと数値的アプローチについて, 両者の結果の比較を行う.

5. ノイズ強度の推定結果

以下の理論的枠組みの詳細は [11] に記載されているので, 本報告では, その結果についてのみ簡潔な考察を与える.

(i) 解析的な推定方法 (田中の方法) 弱ノイズ下で実効的ノイズ強度の解析的推定方法として, [11] の方法について述べる. 入力 $q(\Omega t)$ のもとで観測される定常な PDF ((9)) が, 最大値, 最小値をとる位相を, それぞれ $\psi = \psi_{\max}$, $\psi = \psi_{\min}$ とする. (これらの $P_S(\psi_{\max})$, $P_S(\psi_{\min})$ は, それぞれ確率的に「最も高頻度で観測される状態」と「最も低頻度で観測される状態」に対応している.) $V(\psi_{\max})$, $V(\psi_{\min})$ は (充分小さい $|f| \ll 1$ のとき) それぞれ $V(\psi)$ の最小値, 最大値に充分近くなる. それらの比は同期の耐ノイズ性を示す量と見做し得る (cf. [12]) ので, これを, 入力 q の下での同期コヒーレンス $C_S[q]$ と定義する (その導出, 特徴付けは, [11] 参照):

$$C_S[q] \equiv \frac{P_S(\psi_{\max})}{P_S(\psi_{\min})}. \quad (12)$$

いま, 弱ノイズ (すなわち $\beta \gg 1$) であり, さらに, ポテンシャルの傾き小: $|f| \ll 1$ とすると, (9, 11) 等について, Laplace の方法等による系統的な漸近近似が可能になる. 上記のコヒーレンス $C_S[q]$ は (かなりの計算の後, 結果として) 次の簡潔な漸近式として与えられる:

$$C_S \approx 2e^{\beta(dV + f\Delta\psi)} / \left(1 + e^{\beta 2\pi f} \right) \quad (\beta \rightarrow \infty, |f| \rightarrow 0). \quad (13)$$

但し, $\Delta\psi$ は観測可能な位相差 $\Delta\psi \equiv \psi_{\max} - \psi_{\min}$ であり, f , C_S も (上記の通り) 観測可能. 一方, 実効的ノイズ強度 β^{-1} と (Z と q に対し固有の) ポテンシャル壁の高さ $dV \left(\equiv \bar{V}(\psi_{\min}) - \bar{V}(\psi_{\max}) \right)$ は, 推定の対象である. ここで, 所与の Z と q に対し, 入力 q の周波数 Ω を, ある程度自由に設定可能であるので, Z_0 , q_0 を, それぞれ Z , q の定数部分として, f は:

$$f = \Delta + Z_0 q_0 \quad (14)$$

により、自由に設定可能である。そこで、異なる n 個の f ($= f_i, 1 \leq i \leq n$) に対し、それぞれ n 組の観測データ ($\Delta\psi_i, f_i, C_{S,i}$) が期待される。以下で、 n として最小の $n=2$ の場合に、(13) による、 β, dV の推定結果を説明する：(ここでは紙面の制約から、一例を示すにとどめる。) まず、推定すべき β, dV, Z を予め与えておく。すなわち、 $(\beta, dV) = (10.0, 0.3152)$, $Z(\phi) = 0.8944 \cos \phi + 1.7889 \cos 2\phi$ と設定する。その上で、 $f = 0.28 \times 10^{-2}$, $f = 0.26 \times 10^{-1}$ の2通りの入力 $q(\Omega t)$ ($= -0.0015 - 0.1225 \cos \Omega t - 0.1366 \sin \Omega t + 0.0333 \cos 2\Omega t - 0.2117 \sin 2\Omega t$) を与え、それぞれに対し、数値的に得られた観測可能量から、(13) より (β, dV) を得る。結果として、 $(\beta, dV) = (9.826, 0.3143)$ ($\sim (10.0, 0.3152)$) の有効な精度で推定値が得られた。(その際に、(13) 式を2本連立し、ニュートン法により (β, dV) が解として得られた。) さらに、この推定値 $\beta = 9.826$ を用いて、位相感受関数の推定も可能となり、その結果を図1に示す。

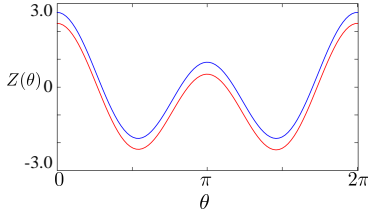


図1: 青線で示した所与の $Z(\theta)$ に対し、推定値 $\beta = 9.826$ を用いて、赤線で示した $Z(\theta)$ が推定される。

(ii) 数値的な推定方法 (i) の解析的アプローチにより、弱ノイズ ($\beta \gg 1$) 下でポテンシャルの傾きが小さい場合 ($|f| \ll 1$) において、観測誤差を含むデータより、有効な精度で β, Z が推定された。これと独立に、漸近近似を経ずに、直接数値的にノイズ強度 β^{-1} を推定する方法を、以下で検討する。このとき、 $\beta \gg 1$ と $|f| \ll 1$ の制約は不要である。一つの手段として、(9, 10) 中の規格化定数 C に注目する。まず、先の $J_S = -[\Delta + \Gamma(\psi)]P_S(\psi) + \beta^{-1}P'_S(\psi) = V'(\psi)P_S(\psi) + \beta^{-1}P'_S(\psi)$ より、

$$V(\psi) = - \int_0^\psi P_S^{-1}(\psi') [J_S + \beta^{-1}P'_S(\psi')] d\psi'. \quad (15)$$

これをもとに、(9) より C に関し、2つの独立した

式を得る:

$$C = \frac{1}{P_S(\psi_{\max})e^{\beta V(\psi_{\max})}} \int_{\psi_{\max}}^{\psi_{\max}+2\pi} e^{\beta V(\psi')} d\psi',$$

$$C = \frac{1}{P_S(\psi_{\min})e^{\beta V(\psi_{\min})}} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min}+2\pi} e^{\beta V(\psi')} d\psi'. \quad (16)$$

ここで、 $\psi_{\max}, \psi_{\min}, P_S(\psi_{\max}), P_S(\psi_{\min})$, さらに $V(\psi)$ 中の J_S は観測可能であることに注意する。(16) の両者の差を取ることで、ノイズ強度 β^{-1} を与える方程式: $G(\beta) = 0$ が以下の通り得られる。

$$G(\beta) \equiv \frac{1}{P_S(\psi_{\max})e^{\beta V(\psi_{\max})}} \int_{\psi_{\max}}^{\psi_{\max}+2\pi} e^{\beta V(\psi')} d\psi' - \frac{1}{P_S(\psi_{\min})e^{\beta V(\psi_{\min})}} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min}+2\pi} e^{\beta V(\psi')} d\psi' = C - C = 0. \quad (17)$$

この $G(\beta) = 0$ の解の挙動を把握するために、以下で、次の2つのステップを経る。まず、(a) (17) 内の観測可能量の測定誤差を(理想的観測データとして) 0 の近くに設定する。(b) これに対し、現実的な測定誤差の生じる場合を比較対照する。この現実的な測定誤差の一欄を表1に示す。その諸元は以下の通り: J_S は(4)より、 $(2\pi)^{-1}\langle \dot{\psi} \rangle$ として数値的に得られる。(数値積分はEuler法により、時間刻み $dt = 0.1$, 積分時間 1.0×10^7 として実行した。) 次に、 ψ_{\max}, ψ_{\min} はそれぞれ(4)の数値積分の結果得られるヒストグラムから極大、極小点として数値的に得られる。それらの誤差は、(上記の理想的観測データに対応する) 解析的な $P_S(\psi)$ の値と比較することにより得られる。注意すべきは、常に、「 ψ_{\max} の測定誤差」 \ll 「 ψ_{\min} の測定誤差」が成立することである。これは、ヒストグラムの極大点の周辺では、データ点が密であり、一方、極小点においては疎であるため、極小点でのヒストグラムの精度が相対的に低くなるためである。一方、 $P_S(\psi_{\min})$ の値は、 $P_S(\psi)$ の形状が ψ_{\min} の近傍で(おしなべて)フラットであることから、 ψ_{\min} の測定誤差の影響が(比較的)小さいものと考えられる。

以下で、(17) による、 $G(\beta) = 0$ を満たす β の推定結果について述べる。まず、推定の対象として、弱ノイズに相当すると見做される $\beta = 10.0$ と、ノイズ強度が比較的大きい場合の $\beta = 2.0, 5.0$ を設定する。また、 f の値として、($|f| \ll 1$ とみなされる場合の) $f = 0.26 \times 10^{-1}$ と、($|f| \ll 1$ ではない場合の)

$f = 0.28$ を選択した. 以上の設定で, (17) により得られた $G(\beta)$ を図 2, 3, 4 に示す. ましである.

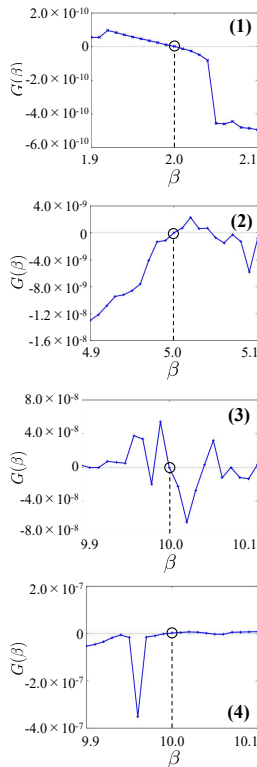


図 2: 測定誤差なしの $G(\beta)$ のグラフ. $J_S, \psi_{\max}, \psi_{\min}, P_S(\psi_{\max}), P_S(\psi_{\min})$ の測定誤差を (理想的観測により) 0 に近く設定した. (1) $\beta = 2.0$, (2) $\beta = 5.0$, (3), (4) $\beta = 10.0$. (1, 2, 3) は $f = 0.28$, (4) のみ $f = 0.26 \times 10^{-1}$ とした. いずれも, $G(\beta) = 0$ となる推定値 β は (設定した β の) 真値に一致している.

まず, 図 2 は, (理想的観測による) 測定誤差を 0 に (近く) 設定した場合を示す. 注目すべきは, $G(\beta) = 0$ となる β は (確かに設定した β の真値として) 正しく推定されていることである. 次に, 観測可能量に含まれる現実的測定誤差が $G(\beta)$ に与える影響を考察する. そのために, 測定誤差の小さい J_S と, 誤差最大の ψ_{\min} に注目する (表 1 参照). その理由は, (17) の $G(\beta)$ への, 全ての観測データ: $J_S, \psi_{\max}, \psi_{\min}, P_S(\psi_{\max}), P_S(\psi_{\min})$ からの誤差の影響を同時に評価することは容易でなく, 問題の本質を見ることが困難なためである.

図 3 は J_S の誤差のみを反映した $G(\beta)$ のグラフを示す. 注目すべきは, J_S は (17) 中の $V(\psi)$ に含まれていて, $e^{\beta V(\psi)}$ の形で $G(\beta)$ の誤差に寄与するが, 図 3 の通り, 推定値 β に生じる誤差は (比較的)

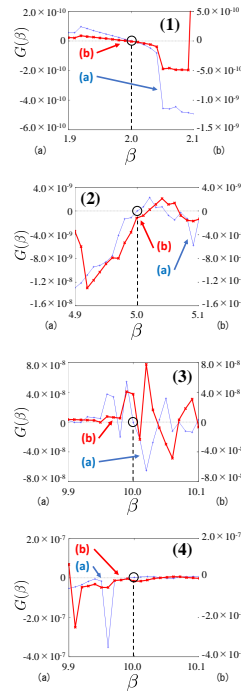


図 3: J_S の誤差のみを反映した $G(\beta)$ のグラフ. 左の (a) は, $J_S, \psi_{\max}, \psi_{\min}, P_S(\psi_{\max}), P_S(\psi_{\min})$ の測定誤差を 0 に近く設定し得られた (理想的) $G(\beta)$. 右の (b) は, J_S の測定誤差のみを反映した $G(\beta)$. (b) の場合, (a) で得られた $G(\beta)$ と異なり, いずれも $G(\beta) = 0$ となる推定値 β は真値から, いくらか離れている. (1) $\beta = 2.0$, (2) $\beta = 5.0$, (3), (4) $\beta = 10.0$. (1, 2, 3) は $f = 0.28$, (4) のみ $f = 0.26 \times 10^{-1}$ とした.

一方, 図 4 は ψ_{\min} の誤差のみを反映した $G(\beta)$ のグラフを示すが, これは図 2 の本来の $G(\beta)$ のグラフと大きく異なっている. このとき, $G(\beta)$ のとる値の大きさは, 図 2 の本来の $G(\beta)$ のそれに対し, $10^3 \sim 10^7$ オーダーの比で大きくなり, $G(\beta) = 0$ となる推定値 β はナンセンスになっている.

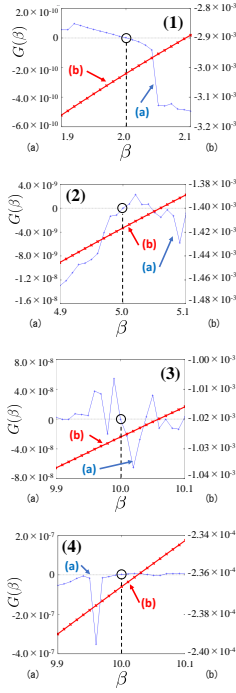


図4: ψ_{\min} の誤差のみを反映した $G(\beta)$ のグラフ。左の (a) は、 J_S , ψ_{\max} , ψ_{\min} , $P_S(\psi_{\max})$, $P_S(\psi_{\min})$ の測定誤差を0に近く設定し得られた (理想的) $G(\beta)$ 。右の (b) は、 ψ_{\min} の測定誤差のみを反映した $G(\beta)$ 。(b) の場合、いずれも $G(\beta) = 0$ となる推定値 β は真値から、大幅に離れている。(1) $\beta = 2.0$, (2) $\beta = 5.0$, (3), (4) $\beta = 10.0$ 。(1, 2, 3) は $f = 0.28$, (4) のみ $f = 0.26 \times 10^{-1}$ とした。

以上の (i), (ii) のいずれのアプローチにおいても、観測データの影響はまぬがれない。しかし、(i) の解析的アプローチでは、(13) の式の簡潔さにより (漸近近似を経ているものの) 観測データの誤差の経路は2つの指数関数の項に留まっている。一方、(ii) の数値的アプローチでは、誤差の経路が (17) 中の6箇所にもなり、その内、積分範囲の両端に極大・極小点をもつ指数関数型積が2つ含まれている。この積分で、特に ψ_{\min} を端点にもつ場合、そこでの $V(\psi)$ の値が最大となるため、 ψ_{\min} の誤差が $(e^{BV(\psi)})$ の積分を経由してきわめて大きく拡大される可能性がある。また、上記の通り、この問題では本質的に、 ψ_{\min} の測定誤差が一番大きいという事実もある。以上より、((ii) のアプローチに比べ、) (i) のアプローチは、弱ノイズである場合に限られるものの、ある程度広い範囲のノイズ強度が、有効な精度で得られている点で、(現時点で) 唯一の有効な方法といえるだろう。

最後に、使用した観測データの測定誤差を表1に示す。(以上の計算では、一貫して高精度を指定した Mathematica の数値積分のルーチンを使用している。)

表1: 各観測データの測定誤差 [%]

f	β	J_S	ψ_{\max}	ψ_{\min}	$P_S(\psi_{\max})$	$P_S(\psi_{\min})$
0.28	2.0	0.3358	0.1890	11.0732	1.9978	1.915
0.28	5.0	0.3323	0.2252	4.7169	1.7144	1.513
0.28	10.0	0.3389	0.1823	3.4653	1.4117	0.915
0.26×10^{-1}	10.0	0.4412	0.0168	0.9969	1.5518	2.465
0.28×10^{-2}	10.0	1.2145	0.0382	0.7744	1.5634	2.705

謝辞 本研究を行うにあたり貴重な御助言を頂きました中尾 裕也先生 (東工大), 實松 豊先生 (九州大), István Z. Kiss 先生 (SLU) に感謝致します。また日頃ご議論いただく非線形問題研究会ならびに CCS (複雑コミュニケーションサイエンス研究会) の諸氏に感謝します。本研究の一部は、科研費基盤研究 (B) (24K03008) を受けて行われました。

参考文献

- [1] A. J. Viterbi, *Principles of Coherent Communication*, (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [2] J. Lee, M. LaHaye, and P. Feng, Design of strongly nonlinear graphene nanoelectromechanical systems in quantum regime, *Appl. Phys. Lett.* 120, 014001 (2022).
- [3] Y. Kato, N. Yamamoto, and H. Nakao, Semiclassical phase reduction theory for quantum synchronization, *Phys. Rev. Research* 1, 033012 (2019).
- [4] U. Seifert, Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines, *Rep. Prog. Phys.* 75, 126001 (2012).
- [5] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization—A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [6] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation—Methods of Solution and Applications, Third printing* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1996).
- [7] V. Blickle, T. Speck, U. Seifert, and C. Bechinger, Characterizing potentials by a generalized to

- nonequilibrium, Phys. Rev. E **75**, 060101(R) (2007).
- [8] V. Blickle, T. Speck, C. Lutz, U. Seifert, and C. Bechinger, Einstein relation generalized Boltzmann factor, Phys. Rev. Lett. **98**, 210601 (2007).
- [9] T. Speck and U. Seifert, Restoring a fluctuation-dissipation theorem in a nonequilibrium steady state, Europhys. Lett. **74**, 391 (2006).
- [10] T. Speck, V. Blickle, U. Seifert, C. Bechinger, and U. Seifert, Distribution of entropy production for a colloidal particle in a nonequilibrium steady state, Europhys. Lett. **79**, 30002 (2007).
- [11] H.-A. Tanaka, S. Suga, A. Keida, H. Nakao, Y. Jitsumatsu, and I. Z. Kiss, Inferring noise intensity and phase response from noisy synchronous oscillators, (投稿中, 2024).
- [12] D. Wilson, A. B. Holt, T. I. Netoff, and J. Moehlis, Optimal entrainment of heterogeneous noisy neurons, Front. Neurosci. **9**, 192 (2015).